Содержание

Введение

Современная экономика широко использует математические методы как для решения практических задач, так и для моделирования социально-экономических явлений и процессов. Математические модели являются важнейшим инструментом исследования и прогнозирования. Они представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации, дают более глубокие представления о закономерностях экономических процессов, способствуют формированию образа мышления и анализа на новом, более высоком уровне. Сегодня, в условиях глобализации мировой экономики и становления общества нового типа – информационного общества – математические модели становятся мощным инструментом прогнозов эволюции цивилизации, что позволяет определять оптимальные магистрали развития экономики, прежде всего в плане обеспечения жизнедеятельности человека. По мере дальнейшего развития общества все более и более важным является разработка путей совершенствования экономических отношений с точки зрения оптимального использования всех природных, производственных, материальных и трудовых ресурсов. Поэтому не случайно экономисты и математики, занимающиеся вопросами применения математики в экономике, большое внимание уделяют разработке математических методов построения оптимальных планов, обеспечивающих выпуск необходимой продукции при минимальных затратах труда, изучению закономерностей наиболее рационального распределения и использования ресурсов производства. Использование математических методов и моделей актуально как на уровне деятельности фирмы в условиях рынка, так и в макроэкономике – на уровне планирования и анализа аспектов экономической деятельности региона и страны.

В учебное пособие включены некоторык прикладные модели экономических процессов – это модели поведения потребителей и производителей, модели взаимодействия потребителей и производителей. Можно показать, что при определенных условиях существуют цены конкурентного равновнсия, при которых каждый потребитель максимизирует свою полезность набора благ, а каждый производитель – свою прибыль. Модели, содержащие дифференциальные уравнения, описывают экономические процессы, которые развиваются во времени и потому являются динамическими процессами. Динамика экономического развития на макроуровне изучается в рамках теорий роста и циклов. Теория роста исследует факторы и условия устойчивого развития экономики. Экономический рост можно рассматривать как увеличение объема создаваемых полезностей и, следовательно, как повышение жизненного уровня населения. В учебном пособии рассматриваются экономико-математические модели, общие при обучении студентов по направлению «Экономика». Учебное пособие содержит теоретическией материал, примеры решения практических заданий с использованием информационной системы Excel и перечень задач для самостоятельного решения.

Глава 1. Некоторые прикладные модели экономических процессов

Теоретической основой многих математических моделей являются предельные величины и их соотношения. Предельная или маржинальная величина определяется как производная для непрерывной функции $F(x)$ и обозначается $MF(x) = \frac{dF}{dx}$. Если функция $F(x)$ не является непрерывной, то под маржинальной величиной понимают отношение приращения функции к приращению аргумента $MF(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x}$. Если рассматривать функцию полезности, то ее производная будет называться предельной полезностью. В теории предельной полезности основным выводом является утверждение о том, что стоимость материальных благ определяется их предельной полезностью. Теория предельной полезности, объединенная с теорией предельной производительности факторов производства, теорией спроса и предложения охватывает важнейшие проблемы экономики. Их синтез осуществляется в рамках моделей равновесия, в которых делаются попытки связать воедино теорию производства, обмена, распределения и потребления. Предельный анализ выступает прежде всего как метод экономического анализа в предположении об оптимальном характере поведения исследуемой экономики, ее отдельных процессов и явлений. В экономике можно увидеть достаточно обширный набор моделей оптимального поведения. Например, в модели поведения потребителя предполагается, что он ищет максимум полезности набора благ. Модели фирмы основаны на предпосылке обеспечения максимума прибыли для предпринимателя. Модели рынка – на предпосылке оптимальных стратегий участников обмена. Модели общего равновесия – на предпосылке цен оптимального плана. Модели воспроизводства – на предпосылке оптимального роста. Предельные величины и их соотношения являются исходной основой анализа равновесия для условий свободной конкуренции и различных видов монополий. Основные идеи теории предельной полезности нашли наиболее полное отражение в модели поведения потребителя и производителя.

1.1. Моделирование поведения потребителя

Функция полезности и ее характеристики

Модель поведения потребителя заключается в том, что каждый потребитель, осуществляя выбор различных наборов благ, при заданных ценах и имеющемся доходе стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

В модели рассматривается индивидуальный потребитель. Предполагается, что он может представлять собой определенный тип совокупного потребителя. Потребителю предлагается конечное число различных видов n благ. Любой набор благ описывается n-мерным вектором $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \geq 0$ – количество i-го блага, приобретенного потребителем, $i = 1, 2, ..., n$. Способность блага удовлетворять ту или иную потребность потребителя называют полезностью блага.

Существуют различные подходы к измерению полезности набора благ: количественный (кардиналистский); порядковый (ординалистский). Количественный подход основан на представлении о возможности измерения полезности набора благ в гипотетических единицах – ютилах. Порядковый подход к анализу полезности является наиболее распространенным. От потребителя не требуется, чтобы он умел соизмерять блага в каких-то искусственных единицах измерения. Достаточно, чтобы потребитель был способен упорядочивать все возможные наборы благ по степени их предпочтения, т.е. располагать их в порядке возрастания их полезности.

Свое отношение к различным наборам благ потребитель может выразить при помощи так называемого бинарного отношения слабого предпочтения. Это отношение определено на множестве потребительских наборов, записывается при помощи знаков предпочтения $\succ$ или $\prec$, ~. Читается «предпочтительнее», «эквивалентно» и выражается формулой $\bar{x} \succ \bar{y}$ или $\bar{x} \prec \bar{y}$, $\bar{x} \sim \bar{y}$. В теории потребления бинарные отношения слабого предпочтения удовлетворяют важным предположениям, которые называются аксиомами.

В модели потребитель, упорядочивая свое отношение к различным наборам благ, руководствуется следующими аксиомами:

а) **ненасыщаемостью**. Больший набор всегда предпочитается меньшему набору. Если $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) > \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, то $\bar{x} \succ \bar{y}$. Если к любому набору благ добавить дополнительную единицу, то полученный набор всегда предпочтительнее прежнего;

б) **совершенностью.** В отношении двух наборов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ потребитель может однозначно определить, какой из этих наборов он предпочитает, или они для него равнозначны (эквивалентны). Совершенность отношения означает, что для любых двух наборов обязательно имеет место соотношение $\bar{x} \succ \bar{y}$, $\bar{x} \prec \bar{y}$ или $\bar{x} \sim \bar{y}$. Это, в свою очередь, означает, что не существует таких наборов, которые потребитель не мог бы сравнить с другими;

в) **транзитивностью.** Для трех наборов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ следует что, если $\bar{x} \succ \bar{y}$, а $\bar{y} \succ \bar{z}$, то $\bar{x} \succ \bar{z}$**.** Эта аксиома отражает совместимость (непротиворечивость) оценок потребителей;

г) **рефлексивностью.** Потребитель всегда выбирает наиболее предпочтительный набор из существующих, который обеспечивает ему большую полезность или больший уровень удовлетворения потребностей.

После упорядочения набора благ по степени их предпочтения строится функция предпочтений или функция порядковой полезности. Функция полезности не является измерителем какой-то конкретной «полезности», она лишь дает представление о ранжировании различных наборов благ, почему и называется функцией порядковой полезности. Функция полезности $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это скалярная величина, определенная на множестве потребительских наборов благ и являющаяся индикатором предпочтения, поскольку обладает следующим свойством: $\bar{x} \succsim \bar{y}$ тогда и только тогда, когда $u(\bar{x}) \geq u(\bar{y})$.

Таким образом, в теории порядковой полезности понятие полезности набора благ означает не более чем порядок предпочтения набора благ, а индикатором предпочтения является функция полезности. Поэтому модель поведения потребителя можно сформулировать следующим образом: потребитель, при заданных ценах и имеющемся доходе стремится максимизировать свою функцию полезности.

Функция полезности, упорядочивающая наборы благ по степени их предпочтения, не является однозначной. Каждый потребитель имеет свою функцию полезности. Чаще всего она рассматривается как монотонно возрастающая, дважды дифференцируемая функция, определенная на множестве потребительских наборов. В экономическом анализе часто используются некоторые конкретные виды функций полезности (табл. 1.1), причем подбор вида функций и оценка числовых значений параметров производится на основе наблюдений и анализа поведения потребителей и тенденций покупательского спроса в зависимости от уровня благосостояния. Геометрическим образом функции полезности является гиперповерхность в ($n+1$)-мерном пространстве, где n измерений образуют блага, ($n+1$) измерение характеризует высоту уровня целевой функции полезности, которая соответствует определенному набору благ (полезность набора благ при потреблении).

Таблица 1.1

Виды функций полезности

Вид функции полезности	Функция полезности	Ограничения
Логарифмическая	$u(\overline{x})=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \ln x_j$	$\alpha_j>0,$ $x_j>0, j=1,..,n$
Мультипликативная	$u(\overline{x})=a\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_j}$	$0<\alpha_j<1;\quad x_j>0,$ $j=1,..,n;\quad a>0$
Аддитивная	$u(\overline{x})=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j^{\beta_j}$	$\alpha_j>0;\quad x_j\geq 0,$ $0<\beta_j<1;\quad j=1,..,n$
Квадратичная	$u(\overline{x})=\sum_{j=1}^{n}a_j x_j+$ $+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_i x_j$	$a_j+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_j>0$ $j=1,..n, i=1,...,n,$ $B=(b_{ij})$ – отрицательно определенная матрица

Предельный анализ функции полезности

Определение. Предельная полезность блага – это прирост полезности набора благ при изменении объема данного блага на одну единицу.

Так как полезность набора благ означает порядок предпочтения набора благ, а индикатором предпочтения является функция полезности, то можно говорить не о приросте полезности набора благ, а о приросте функции полезности и под предельной полезностью i-го блага можно рассматривать частные производные первого порядка функции полезности.

Определение. Частные производные первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функции полезности $u=u(x_1,x_2,...,x_n)$ называют предельной полезностью i-го блага и обозначают символом $M_i u, i=1,2,...,n$. Предельная полезность i-го блага показывает, на сколько единиц увеличится функция полезности, если количество потребляемого i-го блага изменится на единицу («малую единицу»).

Эластичность функции полезности

Определение. Пусть дана функция полезности $u(x)$. Если существует предел отношения относительного приращения функции (полезности) $\frac{\Delta u}{u}$ к относительному приращению аргумента (блага) $\frac{\Delta x}{x}$, когда $\Delta x \to 0$, то его называют эластичностью функции полезности в точке x и обозначают $E_x(u)$, т.е.

$$E_x(u) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{u} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{x}{u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{x}{u} \cdot Mu\ ,$$

где Mu – предельная полезность блага x. Эластичность функции полезности в точке x приблизительно показывает, на сколько процентов увеличится функция полезности , при изменении количества блага на 1%.

Замечание. Можно показать, что эластичность функции равна отношению предельной и средней величины: $E_x(u) = \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u/x} \cdot M_x u = \frac{Mu}{Au}$, где Au – средняя величина.

Определение. Пусть дана функция полезности $u(x_1, x_2)$. В этом случае $u(x_1, x_2)$ имеет частные эластичности относительно i-го блага ($i = 1,2$) $E_i = \frac{x_i}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{u} \cdot M_i u$, которые показывают, на сколько процентов увеличится функция полезности при изменении i-го блага на 1% и неизменном потреблении другого блага.

Свойства функции полезности

Рассмотрим функцию полезности двух переменных $u = u\left(x_1, x_2\right)$. Будем предполагать, что она монотонно возрастающая, дважды дифференцируема и строго вогнута, определена на множестве потребительских наборов.

Сформулируем свойства функции полезности.

- С ростом потребления одного из благ и при постоянном потреблении другого блага функция полезности растет. Предельные полезности благ всегда положительны $M_i u > 0, i = 1,2$. Это следует из предположения, что функция полезности является возрастающей по любому ее аргументу и ее частные производные, определяющие предельную полезность благ, больше нуля.

- Небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x_i} = \infty$.

- Предельная полезность каждого блага $M_i u$ уменьшается, если растет объем его потребления. Это значит, что каждая дополнительная единица i -го блага увеличивает полезность набора благ на меньшую величину, чем предыдущая, т.е. каждая дополнительная единица приобретенного блага используется менее эффективно. Другими словами, с ростом потребления i -го блага рост функции полезности замедляется. В этом случае вторые производные функции полезности отрицательны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0, i = 1,2$. Это свойство называют первым законом Госсена или законом убывающей предельной полезности.

Замечание. Встречаются случаи, когда предельная полезность блага сначала увеличивается, достигая максимума, а лишь затем начинает снижаться. Такая зависимость характерна для небольших порций делимых благ.

- При очень большом объеме блага его дальнейшее увеличение не приводит к увеличению полезности $\lim\limits_{\Delta x_i \to \infty} \dfrac{\Delta u}{\Delta x_i} = 0$.

- Предельная полезность каждого блага увеличивается, если растет объем потребления другого блага. Здесь благо, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным, поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и используется более эффективно. В этом случае смешанные производные второго порядка функции полезности положительны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} > 0$.

Замечание. Данное свойство справедливо лишь для благ, не являющихся полностью замещаемыми в потреблении. Линейная функция полезности не удовлетворяет третьему и пятому свойствам.

- Отношение предельных полезностей благ к их ценам есть величина постоянная, харектеризующая предельную полезность денег $\dfrac{M_1 u}{p_1} = \dfrac{M_2 u}{p_2} = \lambda$, где p_1, p_2 – цены благ, λ – предельная полезность денег. Это значит, что полезность, извлекаемая из последней денежной единицы, потраченной на покупку какого-либо блага, одинакова и не зависит от того, на какое благо она израсходована. Это свойство называют вторым законом Госсена.

Замечание. Второй закон Госсена выполняется, когда потребитель достинает макимума удовлетворения своих потребностей или максимума своей функции полезности, т.е. если потребитель распределит свои средства на покупку благ таким образом, что выполняется равенство $\frac{M_1u}{p_1} = \frac{M_2u}{p_2} = \lambda$, то он достигает максимума функции полезности.

Графический анализ функции полезности

Рассмотрим функцию полезности двух переменных $u = u(x_1, x_2)$.

Определение. Линией уровня функции $u = u(x_1, x_2)$ называют геометрическое место точек плоскости, в которых функция принимает одно и то же постоянное значение, равное u_c, т.е. $u(x_1, x_2) = u_c$.

Построим линию уровня для функции $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ (рис. 1.1).

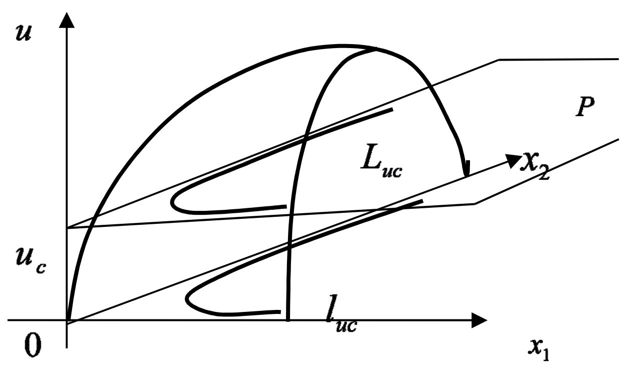

Рис. 1.1. Линия уровня функции $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$

Для построения линии уровня график функции $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ пересечем плоскостью P, параллельной плоскости $x_1 0 x_2$ на высоте u_c. В результате пересечения получим плоскую горизонтальную линию L_{uc}, которая как бы «зависает» над плоскостью $x_1 0 x_2$ на высоте u_c. Проектируя линию L_{uc} на плоскость $x_1 0 x_2$, получим линию уровня l_{uc}, представленную на рис. 1.1. Поскольку u_c может принимать различные значения, то функция $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ имеет много линий уровня. Совокупность всех линий уровня функции $u(x_1, x_2)$ называют картой линий уровня. По карте линий уровня можно получить довольно точное представление о характере графика функции.

Кривые безразличия

Для функции полезности линии уровня называют кривыми (или линиями) безразличия.

Определение. Кривая безразличия представляет собой геометрическое место точек плоскости, каждая из которых представляет собой такую комбинацию наборов благ, при которой функция полезности принимает одно и то же значение, и потребителю безразлично, какой из наборов благ выбирать.

С помощью кривых безразличия ранжируется порядковая полезность комбинаций благ. Они указывают, что величина полезности набора благ возрастает при переходе от менее предпочтительных наборов к более предпочтительным. Таким образом, кривые безразличия являются графическим представлением функции полезности. Кривую безразличия можно рассматривать как функцию, заданную в неявном виде $u(x_1, x_2) = u_c$ или как функцию, заданную в явном виде $x_2 = f(x_1)$.

Виды кривых безразличия

Виды кривых безразличия и их наклон в данной точке определяются потребительскими предпочтениями, т.е. видом функции полезности.

а) Кривые безразличия линейного вида.

Функция полезности является линейной (аддитивной) функцией с полным взаимозамещением благ $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, где a и b – параметры, представляющие собой пропорции, в которых одно благо может быть заменено другим. В этом случае блага называют совершенными заменителями. Уравнения кривых безразличия для линейной функции полезности имеют вид $x_2 = \dfrac{u_c - ax_1}{b}$. Графики кривых безразличия линейного вида представлены на рис. 1.2.

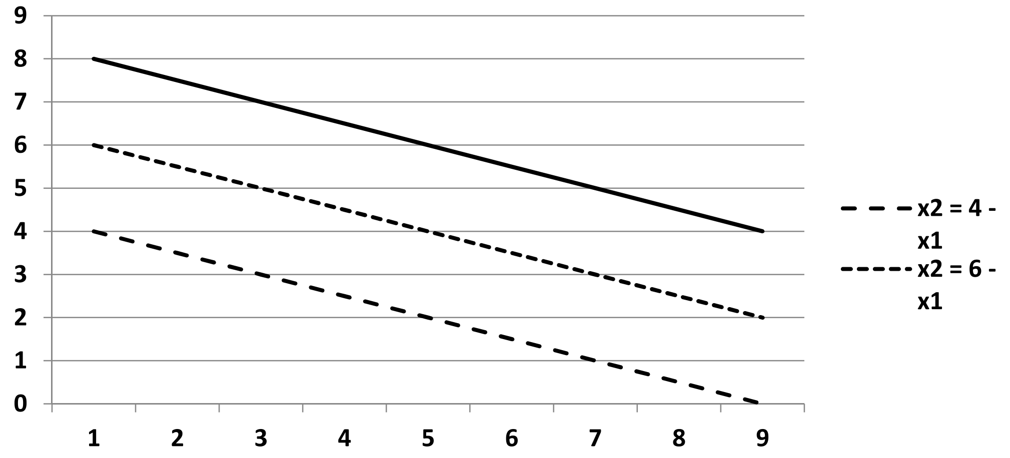

Рис. 1.2. Линейные кривые безразличия

б) Кривые безразличия неоклассического вида.

Функция полезности является неоклассической (мультипликативной) функцией вида $u(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, A > 0$. Данная функция описывает предпочтения потребителя, когда важно включить в набор какое-то количество единиц каждого блага. При этом увеличение потребления одного блага компенсируется за счет уменьшения потребления другого блага. Блага в этом случае называются близкими заменителями. Уравнения кривых безразличия для неоклассической функции полезности имеют вид $x_2 = \left(\dfrac{u_c}{Ax_1^{\alpha}} \right)^{1/\beta}$. Графики этих кривых безразличия представлены на рис. 1.3.

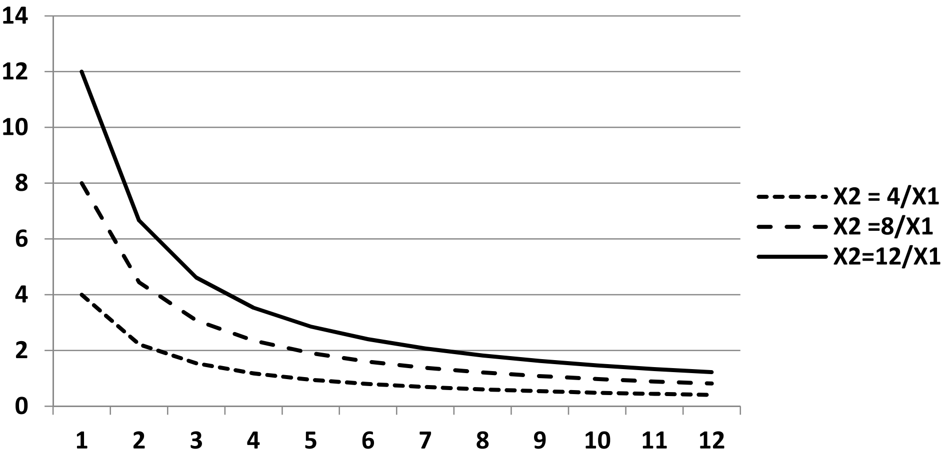

Рис. 1.3. Кривые безразличия неоклассического вида

в) Кривые безразличия для функции полезности с фиксированными пропорциями.

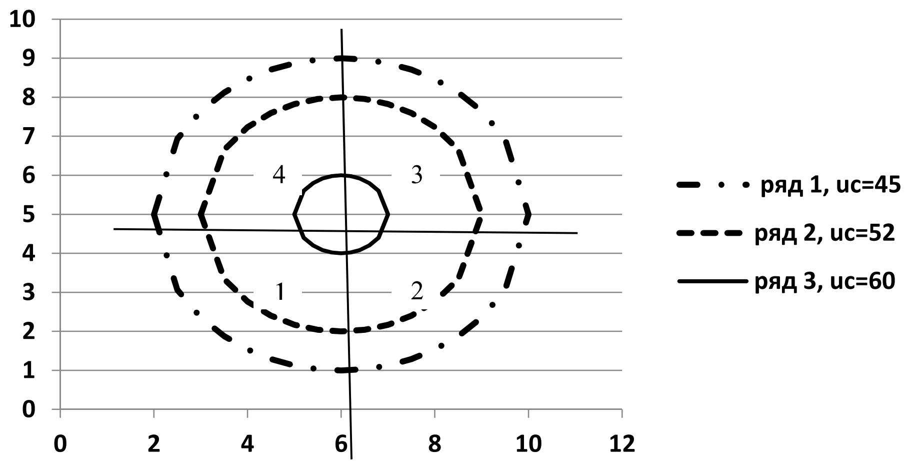

Рис. 1.7. Замкнутые кривые безразличия

Пример 1. Рассмотрим функцию полезности $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ при бюджетном ограничении $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Найдем предельную полезность денег и набор благ, при котором функция полезности максимальна.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \ln x_1 + \ln x_2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I) \to \max .$$

Пример 2. Рассмотрим функцию полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$. Требуется найти при заданных ценах p_1, p_2 и доходе I функции оптимального спроса.

Решение. Функция $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$ означает, что излишки первого или второго товара сверх отношения 2:1 не приносят пользы потребителю. Он получает большую пользу только при увеличении обоих товаров в пределах сохранения пропорции 2:1. Товары с такой функцией полезности называются взаимодополняемыми. Решение данной задачи состоит в решении системы $\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = I. \end{cases}$ Подставляя $x_1 = 2x_2$ в бюджетное ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, получим функции оптимального спроса $x_1^* = \dfrac{2 \cdot I}{2p_1 + p_2}$, $x_2^* = \dfrac{I}{2p_1 + p_2}$.

Задачи для самостоятельного решения к 1.1–1.2

1. Функция спроса на товар определяется линейным уравнением $D(p) = 240 - 3p$. Требуется найти:

а) уравнение зависимости между изменением выручки и ценой товара, эластичность выручки и спроса. Выяснить, как меняются выручка и спрос при различных значениях цены;

б) выяснить, как меняются выручка и спрос при различных значениях цены $p_1 = 20$, $p_2 = 40$, $p_3 = 60$, $p_4 = 80$ и сделать выводы.

2. Речное пароходство рассматривает вопрос об организации обзорных экскурсий по реке в будние дни. Спрос населения на такие экскурсии описывается уравнением $D(p) = 240 - 3p$ (экскурсантов в день). Пароходство может выделить катер на 60 или 100 посадочных мест с разными эксплуатационными расходами. Какая цена на экскурсию максимизирует выручку пароходства? Какой вместимости катер при этом следует задействовать?

3. Функция спроса на товар имеет вид $D(p) = 500 - 0,25p$, где p цена товара. При какой цене объем выручки будет зависеть от ценовой стратегии фирмы?

4. При доходе $I = 800$ д.е. в месяц потребляется 2000 единиц товара. Эластичность спроса по доходу. $E_I(D) = 0,3$. Сколько единиц товара будет потребляться, если доход возрастет на 4%?

5. Цена на товар снизилась на 15%, а объем спроса вырос на 200 ед. Найдите дуговую эластичность спроса и выручки. Определите как изменяется выручка и сделайте выводы.

6. На цветочном рынке по цене $p = 60$ д.е. за штуку продается $D = 600$ гвоздик в день. При этом эластичность спроса по цене равна (-3). Как изменится цена на гвоздики, если спрос на них увеличится на 20%? (Определите новую цену через дуговую и точечную эластичности).

7. Функция спроса на товар описывается уравнением $D(p) = D_0 \cdot e^{-2p^2}$, где p – цена товара, $D_0 = \text{const}$. При какой цене спрос будет эластичным?

Глава 2. Модели экономических процессов, содержащие дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени. Модели, базирующиеся на дифференциальных уравнениях, могут быть моделями роста с непрерывным временем, которые ориентированы на прогноз вероятных тенденций изменения реальных экономических процессов и систем. Модели равновесного роста предназначены для изучения свойств равновесных траекторий (их устойчивости или неустойчивости), а также для определения условий, возвращающих экономическую систему на равновесную траекторию в случае отклонения. Неоклассические модели роста используются для изучения трендовых траекторий при стационарном режиме развития, предполагающем, что макроэкономическое статическое равновесие в условиях совершенной конкуренции и процессе роста как бы воспроизводит само себя.

2.1. Модель естественного роста с постоянными темпами (без ограничений роста)

Пусть $y(t)$ – объем продукции в момент времени t (произведенной, реализованной к моменту времени t).

Будем предполагать, что имеет место аксиома о ненасыщаемости потребителя (рынка), то есть вся производимая продукция будет продана, а также объем продаж не является столь высоким, чтобы существенно повлиять на цену товара p, которую ввиду этого будем считать фиксированной.

Известно, что увеличение объема выпускаемой продукции $y(t)$ связано с чистыми инвестициями – это инвестиции, направленные на расширение производства. Обозначим их через $I(t)$. Чистые инвестиции – это разность между общим объемом инвестиций и амортизационными затратами. Чтобы увеличить объем выпускаемой продукции необходимо, чтобы чистые инвестиции $I(t)$ были больше нуля. В случае, когда $I(t) = 0$, общие инвестиции только лишь покрывают затраты на амортизацию и уровень выпуска продукции остается неизменным. Случай $I(t) < 0$ приводит к уменьшению основных фондов и, как следствие, к уменьшению уровня выпуска продукции. Таким образом, в модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции пропорциональна величине инвестиций $I(t)$, то есть

$$y'(t) = l \cdot I(t)) \text{ или } \frac{dy}{dt} = l \cdot I(t), \tag{2.1}$$

где l – норма акселерации.

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим $I(t) = m \cdot p \cdot y(t)$, где m – коэффициент пропорциональности, называемый нормой чистых инвестиций. Норма инвестиций $0 < m < 1$ является постоянной величиной и составляет ту часть дохода, которая тратится на чистые инвестиции.

Подставляя последнее выражение $I(t)$ в уравнение (2.1), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $y'(t) = l \cdot m \cdot p \cdot y(t)$ или $y'(t) = k \cdot y(t)$, где $k = p \cdot l \cdot m$, которое имеет общее решение $y(t) = c \cdot e^{kt}$.

Если заданы начальные условия $y(t_0) = y_0$, то частное решение будет представлено функцией $y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$, график которой представлен на рис. 2.1.

Дифференциальное уравнение $y'(t) = k \cdot y(t)$ описывает скорость увеличение объема выпускаемой продукции без ограничений роста, и относится к уравнениям естественного роста (рост при постоянном темпе). Этим уравнением описывается также динамика роста цен при постоянном темпе инфляции.

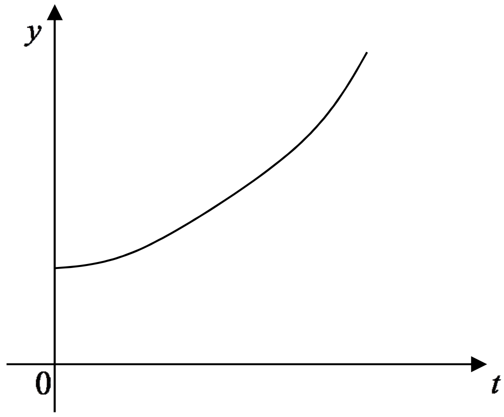

Рис. 2.1. График модели естественного роста с постоянными темпами

Пример 1. Рассмотрим динамику роста уровня цен при постоянном темпе инфляции. Известно, что в начальный момент времени цена на товар равнялась $p(0) = p_0$, а годовой темп инфляции постоянный и равен $r\%$. Описать процесс роста уровня цен при постоянном темпе инфляции. Найти количество лет, необходимых для удвоения уровня цен.

Решение. Обозначим уровень цен в каждый момент времени через $p(t)$. Рост цен при постоянном темпе инфляции будет описываться дифференциальным уравнением $p'(t) = \dfrac{r}{100} \cdot p(t)$. Общее решение данного уравнения имеет вид $p(t) = c \cdot e^{r \cdot t/100}$. С учетом начальных условий получим частное решение дифференциального уравнения, которое позволяет определить уровень цен в каждый момент времени $p(t) = p_0 \cdot e^{r \cdot t/100}$. Найдем количество лет, необходимых для удвоения уровня цен: $2p_0 = p_0 \cdot e^{r \cdot t/100}$, $2 = e^{r \cdot t/100}$, $\dfrac{r \cdot t}{100} = \ln 2$, $t = \dfrac{100 \cdot \ln 2}{r} \approx \dfrac{70}{r}$. Это правило быстрого подсчета количества лет, необходимых для удвоения уровня цен, называют правилом величины 70. Инфляционные процессы достаточно точно описываются уравнениями естественного роста.

2.2. Модель роста с резкой отсечкой

Рассмотрим объем производства $y(t)$ в момент времени t, время непрерывно. Если рассматривать прирост объема производства $y(t)$ в зависимости от использования ресурса $s(t)$ за время Δt, то уравнение роста будет иметь вид:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{ds}{dt}$$

при условии, что предприятие не получает из внешней среды никаких ресурсов и не теряет их. Темп роста при данном условии можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, s).$$

Если допустить, что рост объема производства пропорционален использованию производственного оборудования, процесс роста необратим и прекратится, как только истощаются ресурсы производственных мощностей. В этом случае экономический процесс можно описать дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \nu \cdot y \ ,$$

где ν – удельный (относительный) темп роста.

Параметр ν зависит от вида продукции, соответствующего ресурса и скорости, с которой работает механизм прироста объема производства. Решив это дифференциальное уравнение, получим

$$y(t) = y_0 e^{\nu t} \text{ при } 0 \le t \le t_f .$$

При $t = t_f$ рост прекращается, расход ресурса равен нулю $(s = 0)$ и $y = Y$, где Y соответствует 100%-ному использованию производственных мощностей. Графически экспоненциальный рост, ограниченный реальным ресурсом производственных мощностей, представлен на рис. 2.5.

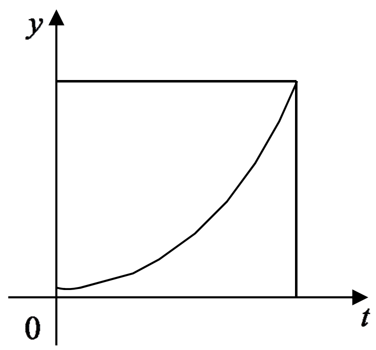

Рис. 2.5. Экспоненциальный рост с резкой отсечкой

2.3. Рост объема производства, пропорциональный расходу ресурса

Если предположить, что механизм роста работает со скоростью, пропорциональной расходу ресурса s, то можно записать

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot s ,$$

где k – некоторая постоянная величина.

Тогда при $s = Y - y$ получим:

$$\frac{dy}{dt} = k(Y - y).$$

Решим данное дифференциальное уравнение

$$\int_{y_o}^{y} \frac{dy}{Y - y} = \int_{0}^{t} k \cdot dt, \; \ln\left(\frac{Y - y_0}{Y - y}\right) = k \cdot t$$

или $y(t) = Y - (Y - y_0) \cdot e^{-kt}$ при $y_0 = 0$

$$y(t) = Y \cdot (1 - e^{-kt}).$$

Графически данный рост представлен на рис. 2.6.

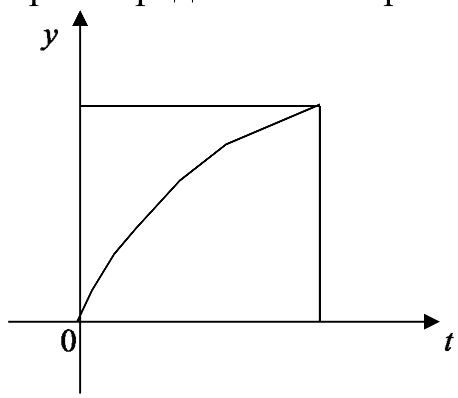

Рис. 2.6. Рост объема производства, пропорциональный расходу ресурса

Литература

1. *Авдеева О.А., Микрюкова О.И.* Некоторые приложения обыкновенных дифференциальных уравнений в экономике : методические указания. Вологда : РИО ВоГУ, 2015.
2. *Агапова Т.А., Серегина С.Ф.* Макроэкономика : учебник. 9-е изд., доп. М. : Маркет ДС, 2019.
3. *Багриновский К.А., Матюшок В.М.* Экономико-математические методы и модели : учебное пособие. М. : Российский университет дружбы народов, 1999.
4. *Булатов А.С.* Микроэкономика : учебник для академического бакалавриата / А.С. Булатов [и др.]; под ред. А.С. Булатова. 3-е изд., испр. и доп. М. : Юрайт, 2018.
5. *Булатов А.С.* Макроэкономика : учебник для бакалавров / А.С. Булатов [и др.] ; под ред. А.С. Булатова. М. : Юрайт, 2014.
6. *Вечканов Г.С., Вечканова Г.Р.* Макроэкономика : учебное пособие. СПб. : Питер, 2007.
7. *Власов М.П.* Моделирование экономических систем и процессов : учебное пособие / М.П. Власов, П.Д. Шимко. М. : НИЦ ИНФРА-М, 2013.
8. *Грачева М.В., Фадеева Л.Н., Черемных Ю.Н.* Моделирование экономических процессов : учебник для вузов. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
9. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике: учебник. М.: Изд-во Мос. гос. ун-та ДИС, 2001.